

ЕКОНОМІКА

УДК 519.866:332.7

DOI: 10.32782/2312-7872.1.2025.01

Бойчук Мирослав Васильович

кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри економіко-математичного моделювання,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
ORCID ID: 0009-0003-9391-8290

Скращук Лариса Вікторівна

кандидат економічних наук,
асистент кафедри економіко-математичного моделювання,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
ORCID ID: 0000-0001-7842-1540

Маханець Любов Леонідівна

кандидат економічних наук, доцент,
доцент кафедри економіко-математичного моделювання,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
ORCID ID: 0000-0001-8671-0596

Ярошенко Олена Іванівна

кандидат економічних наук, доцент,
доцент кафедри економіко-математичного моделювання,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
ORCID ID: 0000-0002-5976-6559

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИХ БАЛАНСІВ З УРАХУВАННЯМ СПЕЦІАЛІЗОВАНОЇ ГАЛУЗІ УТИЛІЗАЦІЇ ЗАБРУДНЮВАЧІВ

Анотація. Дослідження спрямоване на подальший розвиток методологічних і методичних підходів моделювання динаміки еколого-економічних систем, що є одним із ключових шляхів мінімізації негативного впливу економічної діяльності на довкілля. У роботі сформовано новий підхід до еколого-економічного управління виробництвом, орієнтованим на досягнення сталого розвитку, який передбачає забезпечення рівноваги між виробництвом та безпекою навколишнього середовища.

У статті побудовано агреговану модель оптимальних динамічних міжгалузевих балансів із введенням допоміжної галузі по утилізації забруднювачів. Використано метод агрегування, як спосіб зведення багатofакторних моделей до більш простих, що дозволило провести аналіз динамічних міжгалузевих балансів.

Для дослідження побудованої моделі було застосовано інструменти математичного аналізу, зокрема достатні умови оптимальності та метод Лагранжа. Результати дослідження виявили, що розроблена модель характеризується двома типами керування, що відповідають двом різним еколого-економічним режимам. Це відкриття дозволяє адаптувати економічну політику до різних екологічних та економічних умов. Крім того, було встановлено, що обмеження на мінімальний рівень незворотності капіталовкладень еквівалентне обмеженню на агреговану еколого-економічну кінцеву продукцію. Розроблено відповідний інструментарій для прикладного аналізу побудованої моделі. Для запропонованої моделі проведено опис оптимальних процесів. Встановлено, що при нульовому нижньому обмеженні на керування розроблена модель має один двоярусний режим ("max+min") та відповідно один оптимальний багатоярусний процес. Представлено методику дослідження, яка дозволяє вибирати серед багатоярусних еколого-економічних режимів пріоритетний багатоярусний режим, а для нього знаходити пріоритетний оптимальний процес, що сприяє підвищенню якості управлінських рішень в економіці. Впровадження результатів дослідження дозволить реалізувати принципи сталого розвитку й створити фундамент для довгострокового процвітання економіки.

Ключові слова: міжгалузевий баланс, сталий розвиток допоміжна галузь по утилізації забруднювачів, оптимальний процес, еколого-економічні режими.

Постановка проблеми. Сучасна економічна система функціонує як еколого-економічна, оскільки виробництво економічних благ неможливе без експлуатації природних ресурсів. Враховуючи її інтеграцію в екологічну систему, дослідження оптимального розвитку потребує комплексного аналізу економічних та екологічних процесів. Впровадження інтенсивної моделі економічного розвитку, що забезпечує перехід до сталого розвитку, є необхідним для вирішення соціально-економічних та екологічних проблем. Ескалація значущості екологічних пріоритетів актуалізує роль екологічного чинника в економічних відносинах. Ефективна охорона довкілля є ключовим завданням економічного розвитку, що вимагає наукового обґрунтування, методологічної розробки еколого-економічних систем та прийняття відповідних оптимальних управлінських рішень в екологічно збалансованій економіці.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Моделювання еколого-економічних систем є важливим напрямом досліджень у сфері сталого розвитку, оскільки воно дозволяє комплексно аналізувати взаємодію між економікою та навколишнім середовищем.

Значна кількість праць присвячена побудові балансових моделей, що враховують екологічний фактор. Зокрема, у роботі [1, с. 61] автори довели, що економічна система є частиною екосистеми, і міжгалузевий баланс повинен враховувати екологічні обмеження.

У праці [2, с. 13] автори запропонували ряд динамічних моделей, які дозволяють аналізувати зміни в міжгалузевих балансах протягом часу. Побудовані моделі враховують вплив інвестицій, капіталоутворення та інших динамічних факторів на міжгалузеві потоки.

Фундаментальним інструментом для аналізу економічних взаємозв'язків між галузями є модель Леонтьєва-Форда (модель міжгалузевого балансу «витрати-випуск»). Дана модель дозволяє оцінити, як зміни в одній галузі впливають на інші через систему прямих й непрямих витрат, а також визначити розміри реального впливу на навколишнє середовище та неконтрольованого економічного зростання [3, с. 277].

Питанням побудови статичних та динамічних міжгалузевих моделей багатокладної економіки присвячена робота [4, с. 226]. Розроблені автором моделі використовують міжгалузевий підхід у рамках кожного технологічного укладу. Для статичних моделей автор застосовував методи агрегування та оптимізації, тоді як для динамічних моделей реалізовував магістральний підхід.

Побудові оптимізаційних моделей еколого-економічної взаємодії присвячені праці В. Григорківа, основними з яких є агреговані та багатосекторні оптимізаційні динамічні моделі еколого-економічних систем [5, с. 47; 6, с. 18].

У роботі [7, с. 77] побудовано економіко-математичну модель, яка є агрегованим аналогом динамічної моделі Леонтьєва-Форда, для якої розроблено макроекономічну модель максимізації кінцевого еколого-економічного продукту та проведено її дослідження із допомогою принципу Понтрягіна.

Автори [8, с. 81] розробили стохастичну модель оптимального керування динамікою агрегованої еколого-економічної продукції при обмеженні на мінімальну величину незворотності капіталовкладень із використанням вінерівських та пуассонівських процесів та провели її дослідження.

Використання розроблених еколого-економічних моделей дозволяє оцінювати вплив економічної діяльності на довкілля, прогнозувати наслідки різних сценаріїв розвитку та розробляти ефективні екологічні.

Дана робота є продовженням зазначених досліджень та спрямована на розроблення моделі оптимальних динамічних еколого-міжгалузевих балансів із введенням спеціалізованої галузі по утилізації забруднювачів. У роботі використано метод агрегування, як спосіб зведення багатфакторних моделей до більш простих, що дозволило провести аналіз динамічних міжгалузевих балансів.

Формулювання завдання дослідження. Запропонувати агреговану оптимальну модель міжгалузевих балансів із введенням допоміжної галузі по утилізації забруднювачів із обмеженням на мінімальну величину кінцевої продукції та провести її дослідження.

Виклад основного матеріалу дослідження. Згідно з результатами [7, с. 84], [9] та [10, с. 200] запишемо динамічну модель міжгалузевих балансів із введенням допоміжної галузі по утилізації забруднювачів:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + A_{13}x_3(t) + B_{11}\dot{x}_1(t) + B_{12}\dot{x}_2(t) + B_{13}\dot{x}_3(t) + y_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + A_{23}x_3(t) - y_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = A_{31}x_1(t) + A_{32}x_2(t) + A_{33}x_3(t) - y_3(t), \end{cases} \quad (1)$$

де t – часова змінна на відрізку часу $[t_0, T]$, $\dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}$ – похідна по часу, $0 \leq t_0 \leq T$; $x_1 \in \mathbb{R}_+^n$ (n – вимірна множина невід'ємних дійсних чисел) – вектор валового випуску продукції; $x_2 \in \mathbb{R}_+^m$ –

вектор створеного рукотворного капіталу; $y_1 \in \mathbb{R}_+^n$ – вектор кінцевої продукції; $y_2 \in \mathbb{R}_+^m$ – вектор заданого запасу наявного рукотворного капіталу; $x_3 \in \mathbb{R}_+^k$ – вектор знищеного об'єму забруднювачів; $y_3 \in \mathbb{R}_+^k$ – вектор заданих лімітів на викиди забруднювачів в навколишнє середовище (не утилізований об'єм забруднювачів); $A_{11} = (a_{ij}^{(11)} \geq 0)_{i,j=1}^n$ – квадратна матриця затрат продукції ресурсу i на випуск одиниці продукції j ; $A_{12} = (a_{il}^{(12)} \geq 0)_{i,l=1}^{n,m}$ – прямокутна матриця затрат продукції i на одиницю використання рукотворного капіталу l ; $A_{13} = (a_{il}^{(13)} \geq 0)_{i,l=1}^{n,k}$ – прямокутна матриця затрат продукції i на знищення одиниці забруднювача l ; $A_{21} = (a_{lj}^{(21)} \geq 0)_{l,j=1}^{m,n}$ – прямокутна матриця використання рукотворного капіталу l на випуск одиниці продукції j ; $A_{22} = (a_{ls}^{(22)} \geq 0)_{l,s=1}^{m,m}$ – квадратна матриця затрат l -го рукотворного капіталу на одиницю s -го виду рукотворного капіталу; $A_{23} = (a_{ls}^{(23)} \geq 0)_{l,s=1}^{m,k}$ – прямокутна матриця затрат l -го виду рукотворного капіталу на одиницю знищення s -го виду забруднювача; $A_{31} = (a_{sj}^{(31)} \geq 0)_{s,j=1}^{k,n}$ – прямокутна матриця випуску забруднювача s на випуск одиниці продукції j ; $A_{32} = (a_{sl}^{(32)} \geq 0)_{s,l=1}^{k,m}$ – прямокутна матриця випуску забруднювача s при використанні одиниці рукотворного капіталу l ; $A_{33} = (a_{sl}^{(33)} \geq 0)_{s,l=1}^{k,k}$ – квадратна матриця випуску забруднювача s при знищенні одиниці забруднювача l ; $B_{11} = (b_{ij}^{(11)} \geq 0)_{i,j=1}^n$ – квадратна матриця капіталомісткості приростів основного виробництва (випуску продукції); $B_{12} = (b_{il}^{(12)} \geq 0)_{i,l=1}^{n,m}$ – прямокутна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів рукотворного капіталу (допоміжне виробництво – галузь); $B_{13} = (b_{is}^{(13)} \geq 0)_{i,s=1}^{n,k}$ – прямокутна матриця коефіцієнтів капіталомісткості знищення забруднювачів; $\dot{x}_1(t) = (\dot{x}_1^{(1)}(t), \dots, \dot{x}_n^{(1)}(t))'$ (“’” – штрих – операція транспонування матриць) – вектор абсолютних приростів основного виробництва; $\dot{x}_2(t) = (\dot{x}_1^{(2)}(t), \dots, \dot{x}_m^{(2)}(t))'$ – вектор абсолютних приростів використання затрат рукотворного капіталу допоміжного виробництва; $\dot{x}_3(t) = (\dot{x}_1^{(3)}(t), \dots, \dot{x}_k^{(3)}(t))'$ – вектор абсолютних приростів знищення забруднювачів.

Вважатимемо також, що задано початкові умови

$$x_1(t_0) = x_1^{(0)}, x_2(t_0) = x_2^{(0)}, x_3(t_0) = x_3^{(0)}. \quad (2)$$

Модель (1) можна записати у матрично-векторній формі

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

де B_{21} – нульова прямокутна матриця розмірності $(m \times n)$, B_{22} – нульова прямокутна $(m \times k)$, B_{23} – нульова прямокутна матриця $(m \times k)$, B_{31} – нульова прямокутна матриця $(k \times n)$, B_{32} – нульова прямокутна матриця $(k \times m)$, B_{33} – нульова квадратна матриця $(k \times k)$.

Агрегуємо модель (1) цінами з $(n + m + k)$ еколого-економічними продуктами в один об'єднаний (агрегований) еколого-економічний продукт [1, с. 78].

Нехай $q_1' = (q_1^{(1)}, \dots, q_n^{(1)})$ – вектор цін на основну продукцію; $q_2' = (q_1^{(2)}, \dots, q_m^{(2)})$ – вектор цін на допоміжну продукцію, виготовлену при знищенні забруднювачів; $q_3' = (q_1^{(3)}, \dots, q_k^{(3)})$ – вектор тарифів (вартостей) знищення одиниці забруднювачів.

Агрегований вектор-рядок цін $q' = (q_1^{(1)}, \dots, q_n^{(1)}, q_1^{(2)}, \dots, q_m^{(2)}, q_1^{(3)}, \dots, q_k^{(3)})$ помножимо зліва на ліву та праву частини рівняння (3), після чого матимемо рівність

$$q' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = q' \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} + q' \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} + q' \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Агреговану модель (3) можна записати у вигляді

$$x(t) = \alpha x(t) + \beta \dot{x}(t) + y(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (5)$$

де $x = q' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – агрегована еколого-економічна величина валового випуску, $y = q' \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{pmatrix}$ – агре-

гована величина кінцевої еколого-економічної продукції, α – коефіцієнт прямих матеріальних витрат, β – коефіцієнт фондомісткості,

$$q' \left[\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} - \alpha I \right] = 0, \quad q' \left[\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} - \beta I \right] = 0,$$

I – одинична діагональна матриця розмірності $(n+m+k) \times (n+m+k)$, α та β – корені Фробеніуса (додатні найбільші власні числа серед власних чисел) матриць $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$. Умова рівності лівих векторів фробеніуса $q'_A = q'_B$ матриць A та B є умовою

точного агрегування цінами моделі (1).

Введемо величину

$$u(t) = \frac{\beta \dot{x}(t)}{\beta \dot{x}(t) + y(t)}, \quad t \in [t_0, T], \quad (6)$$

яка характеризує відносний обсяг виробничого нагромадження. Цю величину візьмемо за керування із обмеженням

$$0 < u_1 \leq u(t) \leq u_2 < 1, \quad t \in [t_0, T]. \quad (7)$$

Тоді диференціальна агрегована модель (5) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \beta^{-1}(1-\alpha)u(t)x(t), \\ \dot{x}(t) \geq \chi_0 \equiv \text{const} > 0, \quad t \in [t_0, T], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (8)$$

У системі (8) перше рівняння є рівнянням динаміки руху агрегованої продукції, друге обмеження – обмеження на мінімальну величину незворотності капіталовкладень, а третє рівняння – початковий стан агрегованої продукції.

Величина $\dot{x}(t) \geq 0$ характеризує незворотність капіталовкладень, а тому $\chi_0 > 0$ характеризує обмеження на величину незворотності капіталовкладень. За критерій мети візьмемо максимізацію інтегральної дисконтованої агрегованої кінцевої продукції на часовому відрізку $[t_0, T]$ із урахуванням співвідношень (6) та (8)

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T e^{-\delta(t-t_0)} y(t) dt &= \int_{t_0}^T e^{-\delta(t-t_0)} \frac{1-u(t)}{u(t)} \beta dx(t) = \\ &= \int_{t_0}^T e^{-\delta(t-t_0)} [1-u(t)](1-\alpha)x(t) dt \rightarrow \max_{u_1 \leq u \leq u_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Маємо в математичному плані таку задачу оптимального керування: рівняння динаміки руху агрегованої валової продукції

$$\dot{x}(t) = \beta^{-1}(1-\alpha)u(t)x(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (10)$$

початковий стан агрегованої валової продукції

$$x(t_0) = x_0, \quad (11)$$

обмеження на мінімальну величину незворотності капіталовкладень

$$\dot{x}(t) = \beta^{-1}(1-\alpha)ux(t) \geq \chi_0 = \text{const} > 0, \quad t \in [t_0, T]$$

звідки

$$x(t) \geq \beta(1-\alpha)^{-1} u^{-1}(t) \chi_0, \quad t \in [t_0, T] \quad (12)$$

або обмеження на агреговану кінцеву продукцію y в кожний момент часу t (формула (6)):

$$y(t) = \beta u^{-1}(t)[1-u(t)]\dot{x}(t) = \beta u^{-1}(t)[1-u(t)] \times \\ \beta^{-1} u(t)(1-\alpha)x(t) = (1-\alpha)[1-u(t)]x(t)$$

та при $y(t) \geq \chi > 0$, маємо

$$\chi \leq (1-\alpha)[1-u(t)]x(t), \quad t \in [t_0, T] \quad (13)$$

та зв'язок між обмеженнями $\chi = \beta(1-u)u^{-1}\chi_0$,

критерій мети

$$\int_{t_0}^T e^{-\delta(t-t_0)} [1-u(t)](1-\alpha)x(t) dt \rightarrow \max_u, \quad (14)$$

де керуванням виступає відносно виробничих нагромаджень u , а фазовою траєкторією агрегована еколого-економічна величина валового випуску продукції x . Проведемо дослідження оптимізаційної задачі (агрегованої моделі) (10)-(11), (13)-(14).

Дослідження агрегованої моделі. Для дослідження оптимізаційної задачі (10)-(11), (14) використаємо достатні умови оптимальності [11], а для врахування обмеження (13) метод Лагранжа – зведення задачі умовної оптимізації до задачі безумовної оптимізації, отримаємо таку задачу оптимізації функції багатьох змінних

$$R(t, u, x, V, \lambda) \equiv \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \beta^{-1}(1-\alpha)ux - \\ - e^{-\delta(t-t_0)} (1-u)(1-\alpha)x + \lambda [\chi - (1-u)(1-\alpha)x] \rightarrow \max_{\lambda, x, u} \quad (15)$$

де $V(t, x)$ – шукана неперервно-диференційована функція по t та x на декартовому добутку $[t_0, T] \times \{x \geq 0\}$, λ – множник Лагранжа.

Запишемо необхідну умову оптимальності функції R по λ – рівність нулевій частинної похідної першого порядку $\frac{\partial R}{\partial \lambda} = 0$, одержимо

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda} = \chi - (1-\alpha)[1-u(t)]x(t) = 0, \quad t \in [t_0, T]. \quad (16)$$

Це рівняння в подальшому буде використовуватись для визначення моменту перемикавання керування. Функція R лінійна по u із використанням (16) отримує при

$$u^*(t) = \begin{cases} u_1, & \beta^{-1} \frac{\partial V}{\partial x} + e^{-\delta(t-t_0)} < 0, \\ u_2, & \beta^{-1} \frac{\partial V}{\partial x} + e^{-\delta(t-t_0)} > 0, \\ \text{довільне із } [u_1, u_2], & u_1, \beta^{-1} \frac{\partial V}{\partial x} + e^{-\delta(t-t_0)} = 0, \end{cases} \quad t \in [t_0, T]. \quad (17)$$

Розглянемо випадок $\beta^{-1} \frac{\partial V}{\partial x} + e^{-\delta(t-t_0)} = 0$, звідки $\frac{\partial V}{\partial x} = -\beta^{-1} e^{-\delta(t-t_0)}$ та проінтегрувавши по x , одержимо шукану функцію

$$V(t, x) = -\beta^{-1} e^{-\delta(t-t_0)} x$$

та підставимо V у (15). Отримаємо задачу оптимізації

$$\delta \beta^{-1} x - (1-\alpha)x \rightarrow \max_x,$$

розв'язком якої при

$$\delta \beta^{-1} < (1-\alpha) \quad (18)$$

є $x = 0$. А із рівняння динаміки руху (10) отримаємо, що відповідним керуванням є довільні значення u із відрізка $[u_1, u_2]$. Тому цей випадок із практичної точки зору нас не цікавить, тобто немає практичного значення. Таким чином, отримуємо керування – два еколого-економічні режими (два крайові режими):

1) $u^* = u_1$ – еколого-економічний режим мінімального відносного виробничого нагромадження (режим “min”);

2) $u^* = u_2$ – еколого-економічний режим максимального відносного виробничого нагромадження (режим “max”).

Із цих двох режимів можна форматувати багатоярусні режими ($q \geq 2$): двоярусні ($q = 2$) – “min+max”, “max+min”; трьохярусні ($q = 3$) – “min+max+min”, “max+min+max” та інші багатоярусні ($q \geq 4$).

Ці багатоярусні еколого-економічні режими призначені для вибору пріоритетного багатоярусного режиму на часовому відрізку $[t_0, T]$.

Побудуємо оптимальний процес для вибраного двоярусного режиму “max+min”, а для всіх інших багатоярусних режимів алгоритм побудови аналогічний.

При побудові оптимального процесу для двоярусного режиму перший процес, що відповідає першому режиму назовемо лівим процесом, а другий процес, що відповідає другому режиму – правим процесом. А для багатоярусних режимів ($q > 2$): для першого режиму – лівим процесом, для серединних режимів – серединними процесами, а для останнього режиму – правим процесом. Для вибраного двоярусного режиму першим режимом є режим “max”, що відповідає керуванню $u^* = u_2$, а відповідна ліва траєкторія $x_{лів}(t)$ є розв’язком задачі Коші (10)-(11) при $u = u_{лів} = u_2$ та має вигляд $x_{лів}(t) = x_0 e^{\beta^{-1}(1-\alpha)u_2(t-t_0)}$.

За лівим керуванням $u_{лів}$ та траєкторією $u_{лів}$ із рівняння (16) визначається момент перемикавання керування ζ . Оскільки x_0 та χ є векторами розмірності $(n+m+k)$, то момент ζ визначається із такого рівняння (сумарного рівняння (16))

$$(1-\alpha)(1-u_2) \sum_{i=1}^{n+m+k} x_{0i} e^{\beta^{-1}(1-\alpha)u_2(\zeta-t_0)} = \sum_{i=1}^{n+m+k} \chi_i$$

та після логарифмування лівої та правої частин якої отримуємо значення ζ

$$\zeta = t_0 + \beta(1-\alpha)^{-1} u_2^{-1} \ln \frac{\sum_{i=1}^{n+m+k} \chi_i}{(1-\alpha)(1-u_2) \sum_{i=1}^{n+m+k} x_{0i}}. \quad (19)$$

Момент ζ повинен належати проміжку (t_0, T) , а тому повинна виконуватись нерівність

$$\sum_{i=1}^{n+m+k} \chi_i > (1-\alpha)(1-u_2) \sum_{i=1}^{n+m+k} x_{0i}.$$

Тут $\chi' = (\chi_1, \dots, \chi_{n+m+k})$, $x'_0 = (x_{01}, \dots, x_{0(n+m+k)})$.

Одержали лівий процес $\{x_{лів}(t), u_{лів}(t) = u_2, t \in [t_0, \zeta]\}$. Еколого-економічна система рухається по лівій траєкторії $x_{лів}$ при лівому керуванні $u_{лів}$ лівого процесу до моменту перемикавання керування ζ та в цей момент ζ сходиться із лівого процесу і в подальшому рухається по правій траєкторії $x_{пр}$ при правому керуванні $u_{пр}$ правого процесу $\{x_{пр}(t), u_{пр}(t) = u_1, t \in [\zeta, T]\}$, де праве керування $u_{пр} = u_1$ відповідає другому режиму “min” у вибраному двоярусному режимі “max+min”; відповідна права траєкторія $x_{пр}$ за правим керуванням $u_{пр}$ визначається із задачі Коші

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \beta^{-1}(1-\alpha)u_1 x(t), \\ x(\zeta) &= x_{лів}(\zeta) \end{aligned}$$

та розв’язком якої є

$$x_{пр}(t) = x_{лів}(\zeta) e^{\beta^{-1}(1-\alpha)u_1(t-\zeta)}. \quad (20)$$

Рух еколого-економічної системи відбувається по правому процесі до кінцевого моменту часу (горизонту планування) T .

Таким чином, для вибраного двоярусного режиму “max+min” оптимальним процесом $\{x_{он}(t), u_{он}(t), t \in [t_0, T]\}$ є склейка у момент перемикавання керування ζ лівого процесу $\{x_{лів}(t), u_{лів}(t) = u_2, t \in [t_0, \zeta]\}$ із правим процесом $\{x_{пр}(t), u_{пр}(t) = u_1, t \in [\zeta, T]\}$, тобто

$$u_{on}(t) = \begin{cases} u_2, & t \in [t_0, \zeta], \\ u_1, & t \in [\zeta, T], \end{cases} \quad x_{on}(t) = \begin{cases} x_{lie}(t), & t \in [t_0, \zeta], \\ x_{np}(t), & t \in [\zeta, T]. \end{cases}$$

Зауважимо, що для режиму “min” при $u_1 = 0$ відповідна траєкторія $x(t) \equiv const$ і не залежить від змінної t , а тому може існувати один двоярусний режим “max+min”, а інших багатоярусних режимів ($q \geq 2$) немає. Тому існує один оптимальний багатоярусний процес.

При побудові оптимальних процесів для багатоярусних режимів ($q > 2$) необхідно проводити побудову лівого процесу, серединні процеси та правий процес, які відповідають відповідним режимам для вибраного багатоярусного режиму. Відповідним режимам відповідають відповідні керування та траєкторії, які визначаються із відповідних задач Коші. Стички цих процесів дають моменти перемикання керувань та які визначаються аналогічно як для двоярусних режимів із рівняння (16). Склейки в моментах перемикання керувань лівого процесу із першим серединним, серединні процеси між собою та послідовний серединний із правим процесом дають необхідний оптимальний процес. Зауважимо, що кількість серединних процесів є $(q - 2)$, а кількість моментів перемикань $(q - 1)$.

Таким чином, є серед багатоярусних еколого-економічних режимів можливість вибрати пріоритетний багатоярусний режим, а відповідно будувати пріоритетний оптимальний процес.

Зауваження. Вище описана методика має місце при $u_1 = 0$. Тільки при цьому існує двоярусний режим “max+min”, інших багатоярусних режимів немає. А відповідно є один оптимальний двоярусний процес.

Висновки.

1. Запропонована агрегована модель оптимальних динамічних міжгалузевих балансів із введенням допоміжної галузі по утилізації забруднювачів і проведено її дослідження із використанням умов оптимальності.

2. Для запропонованої моделі

- проведено опис оптимальних процесів,
- встановлено, що модель має два керування – два еколого-економічні режими,
- встановлено, що обмеження на мінімальну величину незворотності капіталовкладень рівно-сильна обмеженню на агреговану еколого-економічну кінцеву продукцію,
- встановлено, що при нульовому нижньому обмеженні на керування запропонована модель має один двоярусний режим (“max+min”) та відповідно один оптимальний багатоярусний процес.

Запропонована методика дослідження дає можливість вибрати серед багатоярусних еколого-економічних режимів пріоритетний багатоярусний режим, а для нього знаходити пріоритетний оптимальний процес.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Daly, H. E., & Farley, J. *Ecological Economics: Principles and Applications*. Island Press, 2004. 454 p.
2. Miller, R.E. and Blair, P.D. *Input-Output Analysis Foundations and Extensions*. 2nd Edition. Cambridge : Cambridge University Press, 2009. 737 p.
3. Григорків В. С. Моделювання економіки: підручник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2019. 360 с.
4. Ляшенко О. І. Міжгалузеві балансні моделі багатоукладної економіки. *Проблеми економіки*. Харків, 2013. Вип. 2. С. 226–229.
5. Григорків В. С. Оптимізаційна модель з нелінійним динамічним еколого-економічним міжгалузевим балансом. *Волинський математичний вісник*. Київ, 1999. Вип. 6. С. 47–52.
6. Григорків В. С., Білоскурський Р. Р. Деякі оптимізаційні моделі стохастичного еколого-економічного міжгалузевого балансу. *Економічна кібернетика*. Донецьк, 2003. Вип. 5-6 (23-24). С. 18–24.
7. Скращук Л. В. Агрегована модель оптимального керування динамікою кінцевої продукції в екологічно збалансованій економіці. *Науковий вісник Чернівецького університету. Економіка*. Чернівці, 2017. Вип. 789. С. 77–86.
8. Бойчук М. В., Скращук Л. В. Стохастична модель оптимального керування динамікою випуску агрегованої еколого-економічної продукції при обмеженні на мінімальну величину незворотності капіталовкладень. *Збірник наукових праць. Економічні науки*. Чернівці, 2020. Вип. 16. С. 81–97.
9. Бойчук М. В. Моделювання та оптимізація еколого-економічних систем міжгалузевих балансів із інвестиційними запізненнями. Чернівці : «Місто», 2013. 212 с.
10. Ляшенко І. М. Деякі узагальнення моделі Леонтьєва-Форда «Витрати-випуск». *International Conference : Dynamical system modeling and stability investigation*. Kyiv. 27-30 may 2003. Kyiv, 2003. С. 200.
11. Бойчук М.В., Семчук А.Р. Моделювання та оптимізація повного циклу однопродуктової макроекономіки зростання з урахуванням екологічного фактора. Чернівці : «Місто», 2012. 208 с.

REFERENCES

1. Daly, H. E., & Farley, J. (2004). *Ecological Economics: Principles and Applications*. Connecticut: Island Press.
2. Miller, R. E. & Blair, P. D. (2009) *Input-Output Analysis Foundations and Extensions* (2nd ed., rev). Cambridge: Cambridge University Press.
3. Ghryghorkiv V. S. (2019) *Modeljuvannja ekonomiky [Modeling of the economy]*. Chernivci : Cherniveckyj nac. un-t [in Ukrainian].
4. Ljashenko, O. I. (2013) Mizhghaluzevi balansovi modeli baghatoukladnoji ekonomiky [Inter-industry balance models of a multi-structured economy]. *Problemy ekonomiky – Problems of the economy*, 2, 226-229 [in Ukrainian].
5. Ghryghorkiv, V. S. Optymizacijna modelj z nelineijnym dynamichnym ekologho-ekonomichnym mizhghaluzevym balansom [Optimization model with nonlinear dynamic ecological and economic inter-sectoral balance]. *Volynskij matematychnyj visnyk – Volyn Mathematical Bulletin*, 6, 47–52 [in Ukrainian].
6. Ghryghorkiv, V. S., & Biloskurskyj, R. R. (2003) Dejaki optymizacijni modeli stokhastychnogho ekologho-ekonomichnogho mizhghaluzevogho balansu [Some optimization models of stochastic ecological-economic inter-sectoral balance]. *Ekonomichna kibernetika – Economic cybernetics*, 5-6 (23-24), 18–24 [in Ukrainian].
7. Skrashhuk, L. V. (2017) Aghrehhovana modelj optymalnogho keruvannja dynamikoju kincevoji produkciji v ekologhichno zbalansovanij ekonomici [Aggregated model of optimal control of the dynamics of final products in an ecologically balanced economy]. *Naukovyj visnyk Cherniveckogho universytetu – Scientific Bulletin of Chernivtsi University*, 789, 77–86 [in Ukrainian].
8. Bojchuk, M. V., & Skrashhuk, L. V. (2020) Stokhastychna modelj optymalnogho keruvannja dynamikoju vypusku aghrehhovanoji ekologho-ekonomichnoji produkciji pry obmezheni na minimalnu velychynu nezvorotnosti kapitalovkladenj [Stochastic model of optimal control of the dynamics of the output of aggregated ecological and economic products with a restriction on the minimum value of the irreversibility of capital investments]. *Zbirnyk naukovykh pracj. Ekonomichni nauky – Collection of scientific papers. Economic sciences*, 16, 81–97 [in Ukrainian].
9. Bojchuk M. V. (2013) *Modeljuvannja ta optymizacija ekologho-ekonomichnykh system mizhghaluzevykh balansiv iz investytsijnymy zapiznennjamy [Modeling and optimization of ecological and economic systems of inter-sectoral balances with investment delays]*. Chernivci : “Misto” [in Ukrainian].
10. Ljashenko, I. M. (2003) Dejaki uzaghaljennja modeli Leontjeva-Forda “Vytraty-vypusk” [Some generalizations of the Leontief-Ford Input-Output model]. *International Conference: Dynamical system modeling and stability investigation* (p. 200). Kyiv [in Ukrainian].
11. Bojchuk, M. V., & Semchuk, A. R. (2012) *Modeljuvannja ta optymizacija povnogho cyklu odnoproductovoji makroekonomiky zrostannja z urakhuvannjam ekologhichnogho faktora [Modeling and optimization of the full cycle of single-product macroeconomic growth taking into account the environmental factor]*. Chernivci: “Misto” [in Ukrainian].

Miroslav Boychuk, Larisa Skraschuk,
Liubov Makhnats, Olena Yaroshenko
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

MODELING OF ECOLOGICAL AND ECONOMIC BALANCES TAKING INTO ACCOUNT A SPECIALIZED INDUSTRY OF POLLUTANT UTILIZATION

Abstract. The study is aimed at further developing methodological and methodical approaches to modeling the dynamics of ecological and economic systems. This is one of the key ways to minimize the negative impact of economic activity on the environment. The paper offers a new approach to the ecological and economic management of production, focused on achieving sustainable development, which provides for a balance between production and ecological safety.

The aggregate model of optimal dynamic inter-industry balances with the introduction of an auxiliary industry for the utilization of pollutants is built in the article. The aggregation method is used as a way to reduce multifactor models to simpler ones. This made it possible to analyze dynamic inter-industry balances.

Mathematical analysis tools were used to study the model, including sufficient conditions for optimality and the Lagrange method. The results of the study showed that the developed model is characterized by two types of management corresponding to two different ecological and economic regimes. This finding makes it possible to adapt economic policy to different ecological and economic conditions. In addition, it was determined that the constraint on the minimum level of irreversibility of investments is equivalent to the constraint on the aggregate ecological and economic final product. An appropriate toolkit for applied analysis of the model is developed. The optimal processes are described for the developed model. It is determined that under the zero lower control constraint, the developed model has one two-tier mode (“max+min”) and one optimal multi-tier process. The research methodology is presented. It allows choosing a priority multi-tiered ecological and economic regime among the multi-tiered ecological and economic regimes, and finding a priority optimal process for it. This contributes to improving the quality of management decisions in the economy. The implementation of the research results will allow to realize the principles of sustainable development and create a foundation for the long-term prosperity of the economy.

Keywords: intersectoral balance, sustainable development, auxiliary industry for the utilization of pollutants, optimal process, ecological and economic regimes.